О КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ С МАЛЫМ НОРМАЛЬНЫМ РАНГОМ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП НЕКОТОРЫХ ФАКТОРОВ

А.А. Трофимук[1]

[1]Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина
бульвар Космонавтов 21, 224016 Брест, Беларусь
alexander.trofimuk@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1]. Напомним, что бициклической называют группу, факторизуемую двумя циклическими подгруппами.

В. С. Монахов [2] ввел понятие нормального ранга p-группы P следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X \triangleleft P} log_p|X/\Phi(X)|.$$

Здесь $\Phi(X)$ – подгруппа Фраттини группы X.

Очевидно, что p-группа P имеет нормальный ранг равный 1 тогда и только тогда, когда P циклическая. Из теоремы III.11.5 [3] следует, что нормальный ранг примарной бициклической группы нечетного порядка ≤ 2. Однако, обратное неверно. Так экстраспециальная группа S порядка 27 имеет $r_n(S) = 2$, но S не является бициклической. Кроме того из [3, теорема III.7.6, теорема III.12.4, теорема III.12.5,] следует, что всякая 2-группа нормального ранга ≤ 2 является бициклической. Однако, существуют бициклические 2-группы, которые имеют нормальный ранг ≤ 3. Так в статье Хупперта [4] построена бициклическая группа порядка 2^5

$$G =< a, b, c | a^2 = b^8 = c^2 = 1,\ [a, b] = c,\ [b, c] = b^4, [a, c] = 1 >,$$

у которой $r_n(G) = 3$.

В работе [5] получены оценки инвариантов (производной длины, нильпотентной длины и p-длины) разрешимой группы, обладающей нормальным рядом, силовские подгруппы в факторах которого являются бициклическими.

Рассмотрим для группы G цепочку подгрупп вида

$$\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G), \quad G_i \triangleleft G. \tag{1}$$

Здесь $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G.

Развитием результатов работы [5] стала работа [6], в которой исследовались разрешимые группы, у которых силовские подгруппы в факторах цепочки вида (1) бициклические.

Очевидным продолжением вышестоящих результатов, является следующая

Теорема. *Пусть в разрешимой группе G существует цепочка подгрупп вида* (1) *такая, что $r_n(P) \leq 2$ и $r_n(Q) \leq 3$, где P и Q — силовские p-подгруппы, $p > 2$, и силовские 2-подгруппы факторов цепочки вида* (1)*, соответственно. Тогда нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.*

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант № Ф15РМ-025).

Литература

1. Монахов В. С. *Введение в теорию конечных групп и их классов.* Минск: Вышэйшая школа, 2006.

2. Монахов В. С. *О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга* // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2002. Т. 46, № 2. С. 25–28.

3. Huppert B. *Endliche Gruppen I.* Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

4. Huppert B. *Uber das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen* // Math. Z. 1953. Vol. 58. P. 243–264.

5. Monakhov V. S., Trofimuk A. A. *On a finite group having a normal series whose factors have bicyclic Sylow subgroups* // Communications in algebra. 2011. № 39(9). P. 3178–3186.

6. Трофимук А. А. *Конечные группы с бициклическими силовскими подгруппами в фиттинговых факторах* // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Vol. 19. № 3. С. 304–307.